

# 8A ①



## Zuckerfabrik

An einer Abfüllmaschine in einer Zuckerfabrik werden mehrfach Stichproben genommen, um die Füllmengen der Kilopackungen zu kontrollieren. Dabei ergibt sich die realistische Annahme, dass diese annähernd einer Normalverteilung mit dem Erwartungswert 1000g und der Standardabweichung 21,54g entsprechen.

- (1) Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass man beim Kauf eine Packung mit mindestens 1050g Füllmenge bekommt?
- (2) Wie viel Prozent der Packungen enthalten voraussichtlich höchstens 970g?
- (3) In welchem symmetrischen Bereich um den Erwartungswert befinden sich die Füllmengen von 80% der Packungen?
- (4) Welche Füllmenge wird von 20% der Packungen unterschritten?
- (5) Um Reklamationen möglichst gering zu halten, wird der Sollwert der Maschine nach oben verstellt. Welcher Wert ist zu nehmen, so dass höchstens 5% der Packungen weniger als 1000g enthalten?
- (6) Das Ergebnis einer bestimmten Stichprobe von 100 Packungen sieht aus wie folgt:

Menge in dag	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105
Paketanzahl	2	4	6	10	17	24	16	8	5	6	2

Bestimmen Sie dazu den Mittelwert und die empirische Standardabweichung!  
(Rechnung anschreiben!)

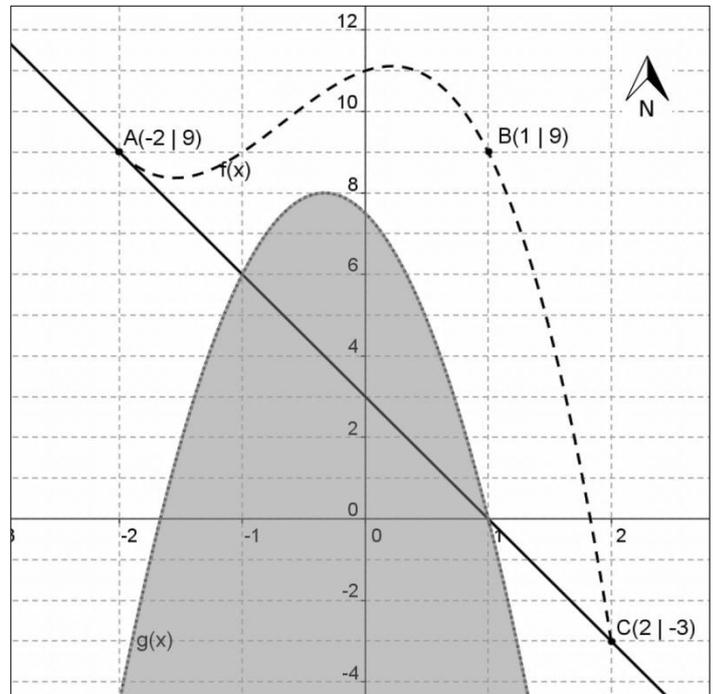
Zeichnen Sie ein Säulendiagramm! Begründen Sie damit, dass die Annahme einer Normalverteilung berechtigt ist!

- (7) Ein Händler weiß aus Erfahrung, dass beim Transport rund 2% der Packungen beschädigt werden.  
Wie viele Packungen muss er mindestens bestellen, um mit 95%iger Wahrscheinlichkeit mindestens 1000 unbeschädigte Pakete zu erhalten?

②

## Umfahrungsstraße

Wegen der Anlage eines Stausees muss die alte Straße durch eine Umfahrung ersetzt werden. Die Abbildung zeigt einen Kartenausschnitt, auf dem die alte Straße (Gerade durch die Punkte A und C), der ungefähre Verlauf der neuen Umfahrungsstraße (gestrichelte Kurve) und der Stausee (graue Fläche) eingezeichnet sind (alle Angaben in km).



- (1) Bestimmen Sie aus der Grafik die lineare Funktion, die die alte Straße beschreibt!
- (2) Die neue Umfahrungsstraße soll im Punkt A „glatt“ (=tangential) an die alte Straße anschließen, sie soll durch den Punkt B gehen und im Punkt C unter einem beliebigen Winkel wieder auf die alte Straße treffen.  
Bestimmen Sie mit Hilfe der Skizze und den genannten Bedingungen eine Polynomfunktion dritten Grades, die die Umgehungsstraße zwischen den Anschlusspunkten beschreibt!

(Zur Kontrolle:  $f(x) = -x^3 - 2x^2 + x + 11$  )

- (3) Bestimmen Sie den Punkt der Umfahrungsstraße, in dem sich das Krümmungsverhalten der Straße ändert!
- (4) Das nördliche Ufer des Sees ist näherungsweise parabelförmig und wird durch die Funktion  $g(x) = -4,5x^2 - 3x + 7,5$  recht gut beschrieben. Wie groß ist die Fläche, die nördlich der alten Straße durch den See bedeckt wird?

③

## Pyramide

Das Dreieck ABC liegt in der Ebene  $\varepsilon$  und ist die Basis einer dreiseitigen Pyramide ABCD, deren Spitze D auf der Geraden g liegt.

**A(-4/-9/1), B(3/3/-1), C(6/-1/-3), D (2/y/z)**      **g:  $\vec{X} = \vec{A} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$**

(1) Bestimmen Sie durch Rechnung die Gleichung der Ebene  $\varepsilon$  sowohl in Parameterdarstellung als auch in Normalform und zeigen Sie die Übereinstimmung mit  **$4x - y + 8z = 1!$**

(2) Bestimmen Sie die Koordinaten von D und den Abstand des Punktes D von der Ebene  $\varepsilon$  (=Höhe der Pyramide)!

Überprüfen Sie, ob die Koordinaten des Fußpunktes der Höhe dem Schwerpunkt des Basisdreiecks entsprechen!

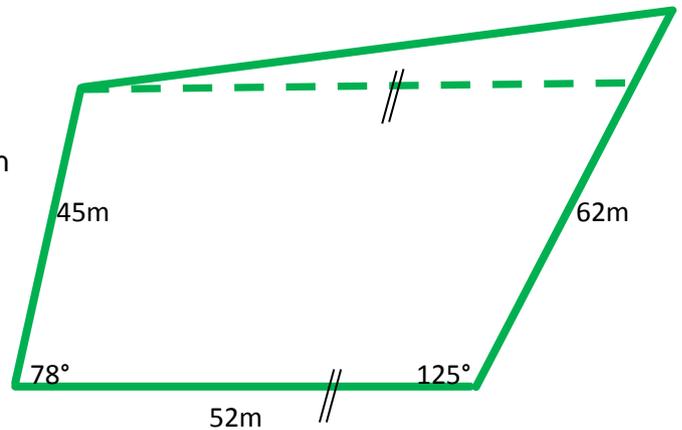
(3) Welchen Winkel schließt die Kante AD mit der Basisebene ein?

(4) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks und das Volumen der Pyramide!

④

### „Starke Unwetter mit tennisballgroßen Hagelkörnern vernichteten ganze Landstriche!“

Auch Obstbauer Karl war davon betroffen und musste den Großteil seiner Obstbäume wegen Hagels entfernen und neue Bäume pflanzen. Nebenstehende Skizze stellt seinen Obstgarten dar. Die oberhalb der strichlierten Linie liegende Fläche wurde wegen eines Erdbebens nach dem Unwetter unbrauchbar.

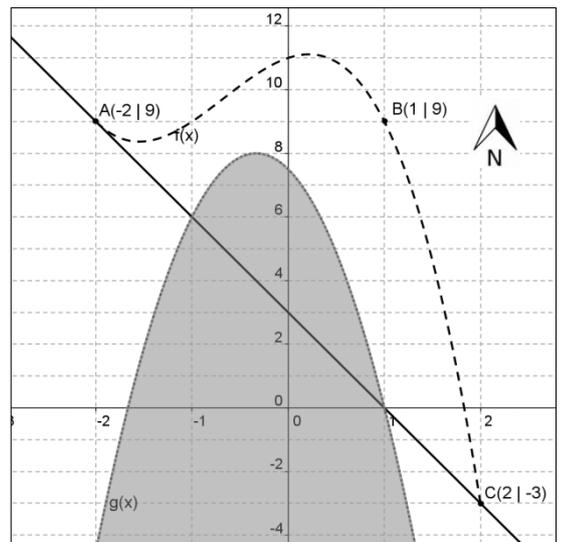


- (1) Legen Sie einen geeigneten Maßstab fest, zeichnen Sie damit einen Plan des ursprünglichen Grundstücks und berechnen Sie seinen Flächeninhalt!
- (2) Wie groß ist der durch die Rutschung erlittene Verlust in %?
- (3) Wie viele Obstbäume haben nun im verbliebenen Teil des Obstgartens Platz, wenn man pro Baum  $2,5\text{m}^2$  Fläche vorsieht?
- (4) Im Rahmen der Wiederherstellung des Obstgartens wird dieser nun verbliebene Teil komplett neu eingezäunt.  
Mit welchen Kosten ist zu rechnen, wenn man pro Laufmeter Zaun 125€ veranschlagt!

## 8B, 8D

### Umfahrungsstraße

Wegen der Anlage eines Stausees muss die alte Straße durch eine Umfahrung ersetzt werden. Die Abbildung zeigt einen Kartenausschnitt, auf dem die alte Straße (Gerade durch die Punkte A und C), der ungefähre Verlauf der neuen Umfahrungsstraße (gestrichelte Kurve) und der Stausee (graue Fläche) eingezeichnet sind (alle Angaben in km).



- (1) Bestimme aus der Grafik die lineare Funktion, die die alte Straße beschreibt.
- (2) Die neue Umfahrungsstraße soll im Punkt A „glatt“ (=tangential) an die alte Straße anschließen, sie soll durch den Punkt B gehen und im Punkt C unter einem beliebigen Winkel wieder auf die alte Straße treffen. Bestimme mit Hilfe der Skizze und den genannten Bedingungen eine Polynomfunktion dritten Grades, die die Umgehungsstraße zwischen den Anschlusspunkten beschreibt.  
(Zur Kontrolle:  $f(x) = -x^3 - 2x^2 + x + 11$ )
- (3) Bestimme den Punkt der Umfahrungsstraße, in dem sich das Krümmungsverhalten der Straße ändert.
- (4) Das nördliche Ufer des Sees ist näherungsweise parabelförmig und wird durch die Funktion  $g(x) = -4,5x^2 - 3x + 7,5$  recht gut beschrieben. Kennzeichne in der Zeichnung jene Fläche, die nördlich der alten Straße durch den See bedeckt wird und berechne ihren Inhalt.

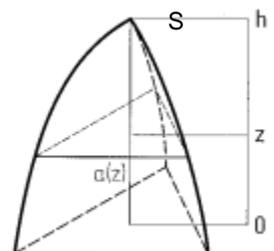
### Tetraeder – oder so ähnlich?!

- A) Das Dreieck ABC liegt in der Ebene  $\varepsilon$  und ist die Basis einer dreiseitigen Pyramide ABCD, deren Spitze D auf der Geraden g liegt.

$$A(-4/-9/1), B(3/3/-1), C(6/-1/-3), D(2/y/z) \quad g: \vec{X} = \vec{A} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- (5) Bestimme durch Rechnung die Gleichung der Ebene  $\varepsilon$  in Parameterdarstellung und als lineare Gleichung und zeige die Übereinstimmung mit  $4x - y + 8z = 1$ .
- (6) Bestimme die Koordinaten von D und den Abstand des Punktes D von der Ebene (= Höhe der Pyramide). Überprüfe, ob die Koordinaten des Fußpunktes der Höhe dem Schwerpunkt des Basisdreiecks entsprechen.
- (7) Welchen Winkel schließt die Kante AD mit der Basisebene ein?
- (8) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks und das Volumen der Pyramide. [3P]

- B) Ein tetraederähnlicher Körper hat als Querschnittsfläche in jeder Höhe  $z^+$  ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge  $a(z) = 16 - z^2$ . Der Körper endet in einer Spitze S. Berechne wie hoch dieser Körper werden kann und ermittle das Volumen!



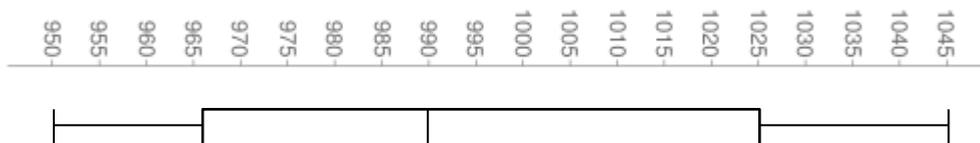
## Zuckerfabrik

**A)** An einer Abfüllmaschine in einer Zuckerfabrik werden mehrfach Stichproben genommen, um die Füllmengen der Kilopackungen zu kontrollieren. Dabei ergibt sich die realistische Annahme, dass diese annähernd einer Normalverteilung mit dem Erwartungswert 1000g und der Standardabweichung 21,54g entsprechen.

- (8)** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man beim Kauf einer Packung mindestens 1050g Füllmenge bekommt?
- (9)** In welchem symmetrischen Bereich um den Erwartungswert befinden sich die Füllmengen von 80% der Packungen?
- (10)** Welche Füllmenge wird von 20% der Packungen unterschritten?
- (11)** Um Reklamationen möglichst gering zu halten, wird der Sollwert der Maschine nach oben verstellt. Welcher Wert ist zu nehmen, so dass höchstens 5% der Packungen weniger als 1000g enthalten?

**(12)** Reklamationen kommen wirklich sehr selten vor – erfahrungsgemäß in 2 von 100 Produktionsserien. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in den nächsten 20 Produktionsserien mindestens eine Reklamation sein wird?

**B)** Bei der Qualitätskontrolle so einer Lieferung mit 600 Paketen wurden unter anderem die Gewichte (Massen) genau festgehalten. Diese sind hier zusammengefasst in Form eines Diagramms dargestellt.



Überprüfe die folgenden Aussagen und kreuze das Zutreffende an:

<b>Aussagen:</b>	<b>w</b>	<b>f</b>
75% der Pakete haben weniger als 1025g.		
Die mittleren 50% liegen im Bereich [966g-1025g].		
Das arithmetische Mittel beträgt 990g.		
25% der Pakete haben höchstens 1025g.		

Wie viele Pakete haben mindestens 1025g Zucker?

Welche wahre Aussage lässt sich für 300 Pakete dieser Lieferung machen?

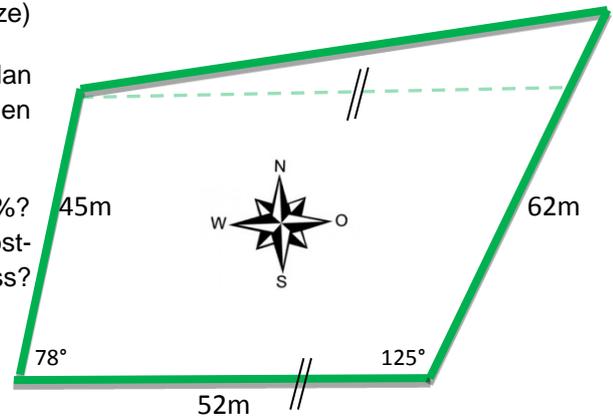
**C)** Zucker wird handelsüblich in quaderförmigen Paketen angeboten. Berechne welcher quadratische Quader mit 1000 cm<sup>3</sup> Inhalt bei der Herstellung der Verpackung möglichst wenig Materialverbrauch hat. Überlege, ob dir das erhaltene Ergebnis praxistauglich erscheint.

## „Starke Unwetter mit tennisballgroßen Hagelkörnern vernichten ganze Landstriche!“

Auch Obstbauer Karl war davon betroffen und musste den Großteil seiner Obstbäume wegen Hagel entfernen und neue Bäume pflanzen. Die kleinere, abgegrenzte Fläche wurde Opfer einer Rutschung und ist seit dem Unwetter unbrauchbar. (siehe abgebildete Skizze)

- A) Gib einen geeigneten Maßstab an, zeichne damit den Plan des ursprünglichen Grundstücks und berechne seinen Flächeninhalt.

Wie groß ist der durch die Rutschung erlittene Verlust in %?  
Wie viele Obstbäume haben im neuen verkleinerten Obstgarten Platz, wenn man mit  $2,5\text{m}^2$ / Baum rechnen muss?



- B) Karl kann beobachten, dass der Ertrag seiner Parzelle im ersten Ertragsjahr von 20 Tonnen Obst/Hektar im zweiten Jahr auf 24 Tonnen/Hektar gestiegen ist.

Karl will keinen Dünger verwenden und nimmt daher eine lineare Zunahme für die nächsten Jahre an. Der Nachbar meint aber, dass bei Verwendung von Biodünger eine exponentielle Modellierung angemessener wäre.\*

(\*alles unter der Voraussetzung, dass die Rahmenbedingungen wie Witterung, Schädlinge, etc passen!)

- (1) Stelle durch Rechnung sowohl die Funktionsgleichungen sowohl für das lineare Wachstum  $f(x)$  als auch für das exponentielle Wachstums  $g(x)$  auf und ergänze die Wertetabelle:

Jahre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<b>f(x): linear</b>	20	24								
<b>g(x):exponentiell</b>	20	24								

- (2) Berechne, wann beim jeweiligen Wachstum das Rekordergebnis von 80 Tonnen/Hektar zu erreichen wäre.
- (3) Stelle die beiden Wachstumsmodelle grafisch dar. Interpretiere sowohl grafisch als auch in Worten, was das bedeutet:  $\frac{g_6 - g_4}{6 - 4}$

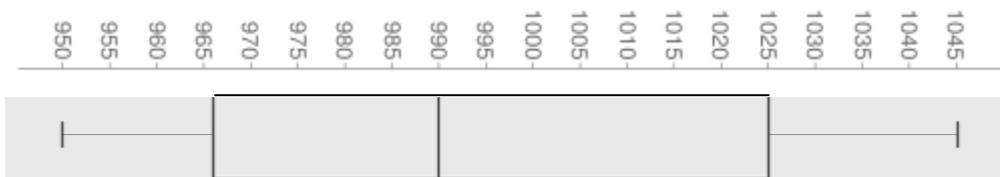
## 8C

### Zuckerfabrik

A) An einer Abfüllmaschine in einer Zuckerfabrik werden mehrfach Stichproben genommen, um die Füllmengen der Kilopackungen zu kontrollieren. Dabei ergibt sich die realistische Annahme, dass diese annähernd einer Normalverteilung mit dem Erwartungswert 1000 g und der Standardabweichung 21,54 g entsprechen.

- (1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man beim Kauf einer Packung mindestens 1050g Füllmenge bekommt?
- (2) Wie viel Prozent der Packungen enthalten voraussichtlich höchstens 970g?
- (3) In welchem symmetrischen Bereich um den Erwartungswert befinden sich die Füllmengen von 80% der Packungen?
- (4) Um Reklamationen möglichst gering zu halten, wird der Sollwert der Maschine nach oben verstellt. Welcher Wert ist zu nehmen, so dass höchstens 5% der Packungen weniger als 1000g enthalten?

B) Bei der Qualitätskontrolle einer Lieferung mit 280 Paketen wurden unter anderem die Gewichte (Massen) genau festgehalten. Diese sind hier zusammengefasst in Form eines Diagramms dargestellt.



Überprüfe die folgenden Aussagen und kreuze das Zutreffende an:

Aussagen:	w	f
75% der Pakete haben weniger als 1025g		
Die mittleren 50% liegen im Bereich [966g-1025g]		
Das arithmetische Mittel beträgt 990g		
25% der Pakete haben höchstens 1025g		

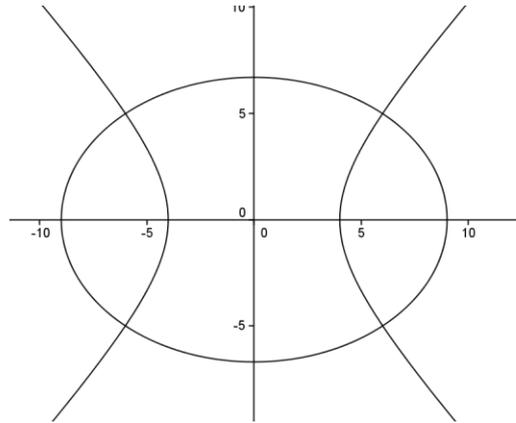
C) Der Lieferant der Zuckerpackungen behauptet, dass höchstens 10% der Packungen beschädigt sind. Der Händler vermutet, dass dieser Anteil höher ist und möchte dies durch eine Stichprobe vom Umfang 20 überprüfen. Der Händler beschließt, die Behauptung des Lieferanten zu verwerfen, wenn er mindestens 5 beschädigte Packungen in der Stichprobe findet ( $\alpha_0=0,05$ ).

- (1) Wie lauten die Nullhypothese und die Alternativhypothese des Anteilstests? Wie hoch ist die Irrtumswahrscheinlichkeit des Händlers?
- (2) Kann der Händler die Behauptung des Lieferanten mit Sicherheit verwerfen? Begründe!

D) Zucker wird handelsüblich in quaderförmigen Paketen angeboten. Berechne welcher quadratische Quader mit  $1000 \text{ cm}^3$  Inhalt bei der Herstellung der Verpackung möglichst wenig Materialverbrauch hat. Überlege, ob dir das erhaltene Ergebnis praxistauglich erscheint.

## Raucher oder Nichtraucher

A) Eine Hyperbel  $5x^2 - 4y^2 = 80$  schneidet eine Ellipse, die dieselben Brennpunkte wie die Hyperbel hat, im Punkt  $P(6/5)$ . Ermittle die Gleichung der Ellipse!  
[Ersatzergebnis :  $5x^2 + 9y^2 = 405$ ]



B) Dreht man die zwischen den beiden Kurven und den beiden Koordinatenachsen eingeschlossene Fläche um die x-Achse (inneres Stück), so entsteht ein Körper, der einem Aschenbecher gleicht.

- (1) Berechne die Masse dieses Aschenbechers aus Onyx, wenn die Dichte  $2,58 \text{ g/cm}^3$  ist. (1 Einheit entspricht 1cm).
- (2) Welchen Bodendurchmesser und welche Höhe hat der Aschenbecher?
- (3) Angenommen, dieses Flächenstück rotiert um die y-Achse. Würde sich der entstehende Rotationskörper als Aschenbecher eignen. Begründe deine Aussage.

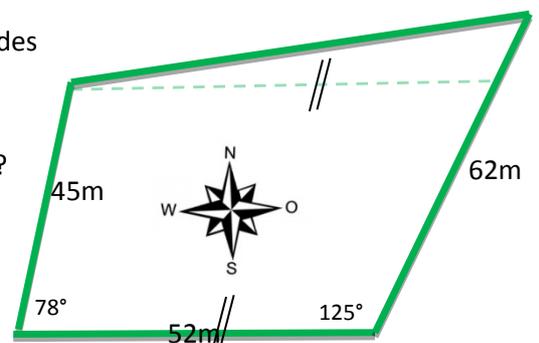
C) Kohlenmonoxid (CO) ist ein farb- und geruchloses giftiges Gas und ist ein Hauptbestandteil des Tabakrauches. Über die Lunge in das Blut gelangt, verbindet es sich mit dem roten Blutfarbstoff Hämoglobin, das für den Sauerstofftransport innerhalb des Körpers verantwortlich ist. Ein Atemtestgerät zeigt den Kohlenmonoxidwert als %-Wert an. Dieser Wert gibt an, um wie viel Prozent die Sauerstoff-Transportkapazität im Blut eingeschränkt ist. Der Wert wird auch CO-Hb genannt. Bei einem Raucher wurde der CO-Gehalt gemessen. Bei der ersten Messung am Morgen zeigte das Messgerät 4% CO-Hb an. Nach 4 Stunden regelmäßigen Rauchens war der CO-Gehalt auf 6% gestiegen.

- (1) Wie lautet das Wachstumsgesetz für den CO-Gehalt  $CO(t)$ , wenn ein exponentielles Wachstum angenommen wird?
- (2) Um wie viel % steigt der CO-Gehalt pro Stunde bei exponentiellem Wachstum?
- (3) Erfreulicherweise baut der Körper das Kohlenmonoxid wieder ab. Nach einer einstündigen Mittagspause, in der Raucher nicht geraucht hat, hat er 5,5% CO im Blut. Wann hat der Raucher einen CO-Gehalt von 8% im Blut, wenn er wieder regelmäßig raucht?

## „Starke Unwetter mit tennisballgroßen Hagelkörnern vernichten ganze Landstriche!“

Auch Obstbauer Karl war davon betroffen und musste den Großteil seiner Obstbäume wegen Hagels entfernen und neue Bäume pflanzen. Die kleinere, abgegrenzte Fläche wurde Opfer einer Rutschung und ist seit dem Unwetter unbrauchbar. (siehe abgebildete Skizze)

- (1) Gib einen geeigneten Maßstab an, zeichne damit den Plan des ursprünglichen Grundstücks und berechne seinen Flächeninhalt.
- (2) Wie groß ist der durch die Rutschung erlittene Verlust in %? Wie viele Obstbäume haben im neuen verkleinerten Obstgarten Platz, wenn man mit  $2,5 \text{ m}^2$ / Baum rechnen muss?



## Flächen

A) Der Graph der Funktion  $f(x) = \frac{ax}{x^2 + b}$  ( $a, b \neq 0$ ) geht durch den Punkt  $P(1/2)$  und hat in  $Q(0/y)$  die Steigung  $8/3$ . Ermittle die Gleichung der Funktion  $f(x)$ !

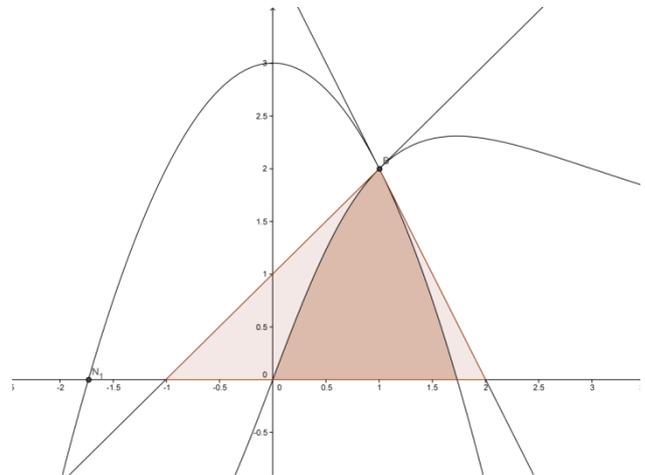
[Ersatzergebnis:  $f(x) = \frac{8x}{x^2 + 3}$ ]

B) Eine Polynomfunktion 2. Grades ist gegeben durch  $g(x) = 3 - x^2$ .

- (1) Zeige, dass der Punkt P auf dem Graphen von g liegt!
- (2) Berechne die Nullstellen von g.

C) Errichte in P Tangenten an die Funktion f und g. Die Schnittpunkte der Tangenten mit der x-Achse und der Punkt P spannen ein Dreieck auf.

- (1) Ermittle den Flächeninhalt des Dreiecks!
- (2) Ermittle den Inhalt der Fläche, den die Graphen von f und g und die x-Achse im 1. Quadranten einschließen.
- (3) Um wie viel Prozent ist der Flächeninhalt des Dreiecks größer als der von den Graphen von f und g im 1. Quadranten eingeschlossene Flächeninhalt?



## Pyramide

Das Dreieck ABC liegt in der Ebene  $\varepsilon$  und ist die Basis einer dreiseitigen Pyramide ABCD, dessen Spitze D auf der Geraden g liegt.  $A(-4/-9/1)$ ,  $B(3/3/-1)$ ,  $C(6/-1/-3)$ ,  $S(2/y/z)$  g:  $X=A + t \cdot (2/5/3)$

- (1) Bestimme durch Rechnung die Gleichung der Ebene  $\varepsilon$  in Parameterdarstellung und als lineare Gleichung und zeige die Übereinstimmung mit  $4x - y + 8z = 1$ .
- (2) Bestimme die Koordinaten von D und den Abstand des Punktes D von der Ebene (=Höhe der Pyramide).  
Überprüfe, ob die Koordinaten des Fußpunktes der Höhe dem Schwerpunkt des Basisdreiecks entsprechen.
- (3) Welchen Winkel schließt die Kante AD mit der Basisebene  $\varepsilon$  ein?
- (4) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks und das Volumen der Pyramide.